

ΚΒΑΝΤΙΚΗ ΜΗΧΑΝΙΚΗ ΚΑΙ ΜΕΛΑΝΕΣ ΟΠΕΣ

1. Εισαγωγή

Μια ανάλυση της δυναμικής συμπεριφοράς ενός σωματιδίου που βρίσκεται εντός του βαρυτικού πεδίου μιας μελανής οπής τύπου Σβάρτζιλντ ($S = 0, Q = 0$) σύμφωνα με τα συμπεράσματα της κλασικής μηχανικής, προβλέπει, ότι είναι αδύνατο για ένα σωματίδιο ως σημειακή μάζα με πεπερασμένες διαστάσεις στον χώρο (X, Y, Z) να διαφύγει από κάποιο σημείο το οποίο βρίσκεται κάτω απ' την ακτίνα Σβάρτζιλντ η οποία για ένα σώμα μάζας M ορίζεται από την εξίσωση:

$$R_s = 2GM / c^2 \quad (1)$$

2. Η Κλασική Προσέγγιση

Αυτό ερμηνεύεται από το γεγονός ότι η ολική ενέργεια E_0 του σωματιδίου μάζας m και ταχύτητας u_0 σε απόσταση R_0 (όπου $0 \leq R_0 < R_s$) από το κέντρο μάζας της μελανής οπής είναι αρνητική ($E_0 < 0$).

Άρα έχουμε:

$$E_0 = E_{K_0} - U_0 < 0$$

ή

$$1/2mu_0^2 < GMm / R_0 \quad (2)$$

Η ανίσωση (2) υποδηλώνει το γεγονός ότι το σωματίδιο θα παραμείνει εντός του βαρυτικού πεδίου της μελανής οπής για άπειρο χρονικό διάστημα ($t = \infty$).

3. Η Κβαντομηχανική Προσέγγιση

Αλλά εάν μελετήσουμε το φαινόμενο μέσα από τα συμπεράσματα της κβαντικής μηχανικής, μπορούμε να παρατηρήσουμε ότι το σωματίδιο έχει να αντιμετωπίσει ένα φράγμα βαρυτικής δυναμικής ενέργειας με τη γενική μορφή $U(R)$ (δηλ. έργο $W(R)$) όπως φαίνεται στο σχήμα I.

Είναι γνωστό ότι ένα σωματίδιο το οποίο έχει να αντιμετωπίσει ένα τετράγωνο φράγμα δυναμικής ενέργειας ύψους U ($U > E$) και πλάτους δx έχει μια πιθανότητα P να διαπεράσει αυτό το φράγμα. Αυτή η πιθανότητα ορίζεται από:

$$P \cong e^{-2K\delta x} \quad (3)$$

όπου

$$K = \frac{\sqrt{2m(U - E)}}{\hbar} \quad (4)$$

Επειδή το φράγμα βαρυτικής δυναμικής ενέργειας έχει τη γενική μορφή $W(R)$ (όπως φαίνεται στο διάγραμμα I) και υποθέτοντας ότι αποτελείται από n τετράγωνα φράγματα πλάτους δR , η πιθανότητα να διαπεράσει όλα αυτά τα φράγματα ορίζεται από:

$$P = e^{-2K_1\delta R} e^{-2K_2\delta R} \dots e^{-2K_i\delta R} \quad (5) \quad \text{όπου} \quad K_i = \frac{\sqrt{2m(W_i - E_{K_0})}}{\hbar} \quad (6)$$

Άρα έχουμε:

$$P = e^{-2(K_1+K_2+\dots)\delta R} = e^{-2 \sum_i K_i \delta R} \quad (7)$$

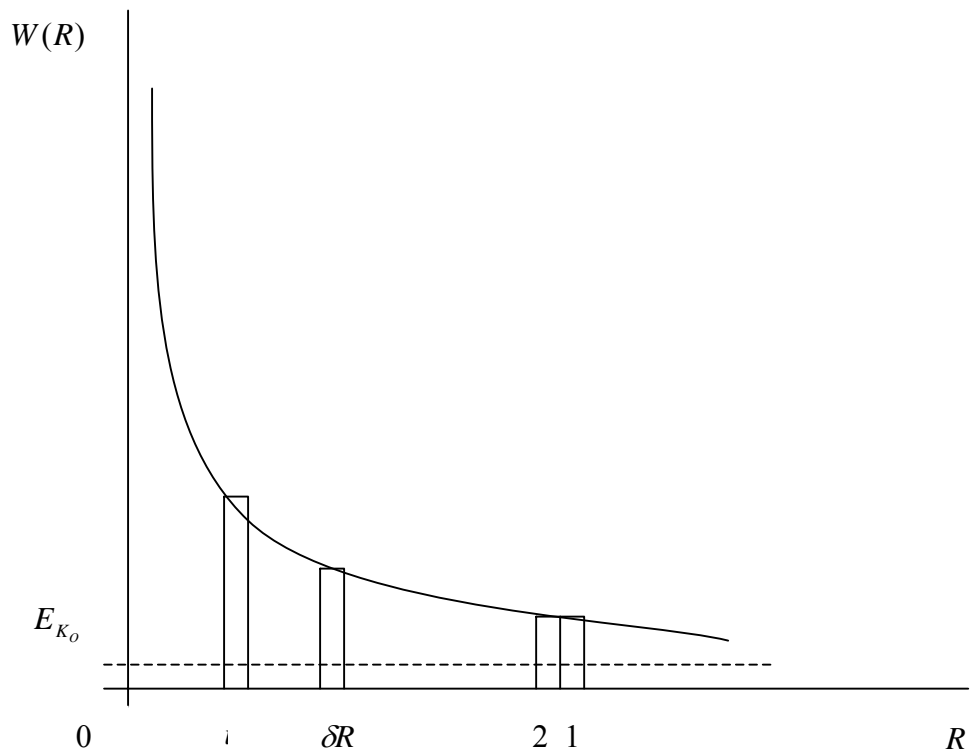
Εάν θεωρήσουμε ότι $\delta R \rightarrow dR$ έχουμε ότι:

$$P = e^{-2 \int \sqrt{\frac{2m[W(R) - E_{K_0}]}{\hbar^2}} dR} \quad (8)$$

4. Συμπεράσματα

Η σχέση (8) ορίζει μαθηματικώς το φαινόμενο σήραγγας σύμφωνα με το οποίο υπάρχει πιθανότητα P για το σωματίδιο να διαφύγει στο άπειρο (θεωρητικά), διαπερνώντας το φράγμα βαρυτικής δυναμικής ενέργειας $W(R)$ που συναντάει σε κάποιο σημείο κάτω από την ακτίνα Σβάρτζιλντ.

Σχήμα I



I. Σωματίδιο κινητικής ενέργειας $E_{k_0} > 0$ εντός μιάς μελανής οπής, που αντιμετωπίζει φράγμα βαρυτικής δυναμικής ενέργειας ύψους $W(R)$ έχει πιθανότητα $P > 0$ να το διαπεράσει.